SISTEMAS DE ECUACIONES Y DIAGRAMAS DE FASE

MAT. ENRIQUE NAVARRETE

Nov . 2004

Estos problemas tratan sobre diversas ecuaciones diferenciales para modelizar interacciones y diferentes tipos de comportamiento. Las ecuaciones implican diferentes equilibrios a largo plazo, dependiendo o no de condiciones iniciales. Como siempre, gran parte de la utilidad de los modelos consistirá en el uso que les demos para poder <u>realizar pronósticos</u>.

<u>Problema 1</u> (Modelo de Competencia)

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x$, donde $\dot{x}$ representa el vector de crecimiento de dos grupos x_1 y x_2 .

1) Escriba explícitamente las dos ecuaciones del sistema. Note que en este modelo cada grupo incrementa proporcionalmente con respecto a sí mismo, pero decrece proporcionalmente con respecto al otro grupo. ¿Qué términos de las ecuaciones representan la competencia entre los grupos?

2) Resuelva el sistema encontrando valores y vectores propios. Encuentre la solución general y la solución particular dada por $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$. Grafique en Excel cada ecuación en función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 1$ año, tomando intervalos de 0,1 año. ¿Se llega a extinguir alguno de los 2 grupos? Si es así, ¿en qué tiempo?

3) Conteste las mismas preguntas considerando $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 200$.

4) Conteste las mismas preguntas considerando $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 180$. ¿Cómo cambia la solución cualitativa del sistema de acuerdo con las condiciones iniciales ?

<u>Problema 2</u> (Modelo Presa-Predador)

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

1) En este modelo, ¿quién es la presa y quién es el depredador? Escriba el sistema en forma matricial y encuentre la solución general por medio de valores y vectores propios, recordando que $e^{i(bt)} = \cos(bt) + i\sin(bt)$.

(*Ayuda*: Verifique que los vectores propios son $(1, \quad i)^t$, $(1, \quad -i)^t$).

2) Encuentre la solución particular dada por $x_1(0) = 1{,}000$ y $x_2(0) = 1{,}000$.

¡Note que en su solución no deben existir números complejos!

3) Grafique en Excel cada ecuación en función del tiempo, desde t = 0 hasta t = 1 año, tomando intervalos de 0,1 año. ¿Se llega a extinguir alguno de los 2 grupos? Si es así, ¿en qué tiempo? ¿Concuerdan los gráficos con el comportamiento esperado?

<u>Problema 3</u> (Modelo Crecimiento-Inflación)

Suponga que la medida de actividad económica $y(t)$ y la tasa de inflación $p(t)$ se relacionan por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ($b > 0$):

$$\dot{y} + \dot{p} = y$$
$$\dot{p} = y + bp$$

1) Verifique que el sistema se puede escribir en la forma $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$.

¿Está de acuerdo con los signos del sistema? ¿Cómo anticipa que se comportarán las variables en el largo plazo?

2) Encuentre los valores propios del sistema. Demuestre que no existen soluciones estables (recuerde que $b > 0$). ¿Para qué valores de b existe comportamiento cíclico (oscilaciones)?

3) i) Suponga que b = 5. ¿Qué tipo de diagrama de fase se obtiene? Encuentre la solución general del sistema y dibuje el diagrama de fase. (*Ayuda*: Verifique que los vectores propios son $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \quad -1\right)^t$, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \quad -1\right)^t$).

ii) Obtenga la solución particular dada por $y(0) = 2a$ y $p(0) = a$. Considerando por separado los casos $a = 1$ y $a = -1$, grafique en Excel cada sistema en función del tiempo, desde t = 0 hasta t = 1 año, tomando intervalos de 0,1 año. Verifique que cada caso se comporta como se predijo en el diagrama de fase (recuerde que el vector propio dominante corresponde al valor propio de mayor valor). (Puede expresar los valores y vectores propios en decimales).

4) i) Suponga que b = 2. ¿Qué tipo de diagrama de fase se obtiene? Encuentre la solución general del sistema, recordando que $e^{i(bt)} = \cos(bt) + i\sin(bt)$. (*Ayuda*: Verifique que los vectores propios son $(1-i, \quad -1)^t$, $(1+i, \quad -1)^t$).

ii) (Opcional): Verifique que la solución particular dada por $y(0) = 2a$ y $p(0) = a$ es la siguiente:

$$y(t) = e^t(2a\cos t - 4a\sin t),$$
$$p(t) = e^t(a\cos t + 3a\sin t).$$

¡Note que en la solución no existen números complejos!

iii) Considerando los casos a = 1 y a = - 1, por separado, grafique en Excel cada sistema de la parte (ii) en función del tiempo, desde t = 0 hasta t = 1 año, tomando intervalos de 0,1 año. ¿Concuerdan los gráficos con el comportamiento esperado?

Problema 4 (Relación entre sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior)

La ecuación diferencial de orden superior $\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$ puede rescribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden de la siguiente manera: introducimos variables $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, con $x = x_0$, y hacemos $\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n - 2$.

De este modo, la ecuación original puede rescribirse como un sistema de n ecuaciones $\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, y $\frac{dx_{n-1}}{dt} = -(a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 x)$.

1) (Opcional) Encuentre la matriz que representa este sistema de ecuaciones de primer orden.

2) Escriba la ecuación de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$ como un sistema de ecuaciones de primer orden en las variables $x_0 = x$ y $x_1 = \frac{dx}{dt}$.

3) Resuelva tanto la ecuación de segundo orden como el sistema de dos ecuaciones de primer orden para el caso b = - 4 y c = 3. Muestre que el polinomio en r para la ecuación de segundo orden es el mismo polinomio en l para encontrar valores propios del sistema de dos ecuaciones. Muestre que las soluciones son equivalentes y realice la comprobación.